РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

NEW ECONOMIC SCHOOL

Беляков А.О.

О динамике объединений людей

Препринт # BSP/2007/094 R

Эта работа была написана на основе магистерской диссертации в РЭШ в 2007 году в рамках исследовательского проекта “Экономический анализ неоднородности и разнообразия в экономической и политической среде” под руководством В.Л. Макарова (РЭШ, ЦЭМИ) и А.В. Савватеева (РЭШ, ЦЭМИ).

Проект осуществлен при поддержке Фонда Форда, Всемирного Банка и Фонда Джона и Кэтрин МакАртуров.

Автор благодарен научным руководителям и консультанту проекта Шломо Веберу за руководство и поддержку, а также всем участникам XXI исследовательской конференции РЭШ.

Moscow
2007

Беляков А.О. О динамике объединений людей / Препринт # BSP/2007/094 R. – М.: Российская Экономическая Школа, 2007. – 19 с. (Рус.)

Предлагается новый механизм передачи территории между группами людей путем торговли с одобрения обоими сторонами посредством голосования по определённым правилам (правило простого большинства, правило вето, и т.п.). Завоевание территории рассматривается как частный случай торговли. Рассмотрены одномерные и двухмерные случаи, в последнем стоимость содержания границы пропорциональна её длине. Из функции полезности индивидуума получено уравнение состояния группы людей. При определенных правилах миграции проведена оценка радиусов минимально и максимально возможных площадей, занимаемых небольшой группой людей, в окружении другой большой группы. Приведены аналогии с процессами в физике.

Ключевые слова: экономика общественного сектора, теория размещения, размер стран

Belyakov Anton. On The Dynamics of People's Unions / Working Paper # BSP/2007/094 R. – Moscow, New Economic School, 2007. – 19 p. (Rus.)

A new mechanism governing the dynamics of territory changing between groups of people such as countries is proposed based on trading with approval of both sides under particular voting rule (veto rule, majority rule, etc.) Conquest of the territory is viewed as a special case of trading. One- and two-dimensional cases are considered, where in the latter case the cost of border between countries is proportional to its length. A state equation is obtained based on particular personal utility function. Under migration rules maximal territory expansion and minimal possible territory are evaluated for small group surrounded by a big one. Parallels with statistical physics processes are revealed.

Key words: public economics, allocation theory, size of nations

ISBN

Содержание

Введение

В данной работе изучается процессы организации и развития групп людей которые владеют определенной территорией. Примерами таких групп могут служить не только страны, но также муниципалитеты и любые объединения землевладельцев, члены которых не могут торговать своей землей без разрешения со стороны группы, к которой они принадлежат.

Исторические примеры можно взять из работ историка Льва Николаевича Гумилева (Гумилев, 1976), в которых он ввел понятие *этноса* как группу людей, обладающих общей моделью поведения, позволяющей им выделить себя из других. Гумилев показал на исторических примерах, что люди в этносе не обязательно имеют одинаковую национальность, гражданство, религию, язык и т. п. Гумилев полагал, что каждый этнос проходит через определенные стадии развития, которые определяются количесвом в нем *пассионарных* людей. Он определил пассионарность как свойство характера человека преследовать необычные цели (с точки зрения обычных людей), такие как слава власть и так далее. В данном исследовании мы попытаемся дать экономическую трактовку этих понятий.

В классической работе Альберто Алесина и Енрико Сполаоре (Alesina & Spolaore, 1997) размер и количество стран на отрезке, по которому равномерно распределены люди, определяется как равновесие, в котором ни один индивидуум возле границы не захочет присоединиться со своей землей к соседней стране. Кроме того, там рассматривается коалиционное равновесие также как в работе (Bolton & Roland, 1997). Чарльз Тибу в своей статье (Tiebout, 1956) рассмотрел равновесие, в котором абсолютно мобильный потребитель выбирает из фиксированного числа юрисдикций ту, где его потребительские предпочтения лучше удовлетворяются. Бьюли опубликовал критику результатов этой работы (Bewley, 1981).

В отличии от упомянутых выше работ в данном исследовании индивидуум ни чего не делает без разрешения. Индивидуум может покинуть страну и присоединиться к другой, только если граждане обоих стран одобрят это. Также предполагается, что функции полезности всех агентов трансферабельны, так что индивидуум может заплатить за разрешение переехать в другую страну. Страны могут торговать своей территорией, так как, например, Россия продала Аляску Америке в 1867 году. Устойчивость результатов торгов зависит от вида функций полезности и правил голосования в странах. Война рассматривается как механизм, предохраняющий от обмана при торговле. Страны, у которых приблизительно одинаковый предельные полезности от территории на границе, скорее будут воевать за неё, чем торговать ею. Мы рассмотрим два режима динамики территории и численности группы людей, определив её максимальные и минимальные размеры (Беляков, 2007).

Представленное исследование дает микроэкономическое обоснование некоторым опубликованным ранее результатам (Беляков, 2007).

1 Механизм перемещения границы в результате торговли землей

Рассмотрим две страны на единичном отрезке (рис. 1) с территориями S_1, S_2, и трансферабельными квазилинейными функциями общественного благосостояния W_1, W_2. Территория обменивается на деньги с одобрения обеими странами посредством го-

Рис. 1: Две страны на интервале

лосования. Решения может приниматься по правилу вето, когда каждый гражданин должен одобрить сделку, или по правилу простого большинства, когда за сделку должны проголосовать более половины граждан каждой страны.

Для простоты далее будем предполагать положительную и монотонно убывающую предельную общественную полезность страны от её территории.

1.1 Правило вето

Если каждый житель обоих стран должен одобрить сделку, то достигается Парето оптимум. Задача отыскания равновесных положений границы сводится к задаче нахождения экстремумов суммарной функции общественного благосостояния обеих стран $W_1(x) + W_2(x)$, так как каждый индивидуум получает компенсацию за уменьшение своей полезности и его функция полезности квазилинейная. Устойчивые положения равновесия соответствуют максимумам

$$W_1(x) + W_2(x) \to \max_{x\in[0,1]} .$$

Условие равновесия – условие первого порядка (FOC)

$$\text{FOC:} \quad \frac{\partial}{\partial x}(W_1(x) + W_2(1-x)) = 0, \tag{1}$$

Условие устойчивости к малым отклонениям от равновесия – условие второго порядка (SOC)

$$\text{SOC:} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(W_1(x) + W_2(1-x)) \leq 0. \tag{2}$$

Если обе страны имеют убывающую предельную полезность от территории, то существует единственное внутреннее решение уравнения (1) и неравенства (2), т.е. единственное устойчивое положение границы, притом Парето оптимальное.

1.2 Правило простого большинства

Если для одобрения сделки продажи части территории требуется лишь половина голосов граждан, покупатель может подкупить только половину избирателей страны продавца, заплатив меньшую сумму чем при правиле вето. Пусть страна 1 платит правящей половине граждан страны 2 за счет излишка покупателя всех своих граждан. Такая сделка может быть осуществлена при условии $\frac{\partial W_1(x)}{\partial x} \geq -\frac{1}{2}\frac{\partial W_2(1-x)}{\partial x}$. Таким образом максимальное значение $\overline{x}$ территории S_1 удовлетворяет условию:

$$\overline{x}: \quad \frac{\partial}{\partial x}(W_1(\bar{x}) + W_2(1-\bar{x})/2) = 0 \tag{3}$$

Но, такой же трюк может проделать страна 2 при покупке территории у страны 1. Следовательно, наименьшая возможная территория S_1 равная $\underline{x}$ получается из условия:

$$\underline{x}: \quad \frac{\partial}{\partial x}(W_1(\underline{x})/2 + W_2(1-\underline{x})) = 0 \tag{4}$$

Таким образом, может существовать целый отрезок $[\underline{x}, \overline{x}]$ точек, где может находится граница, но ни одна из них не является равновесием.

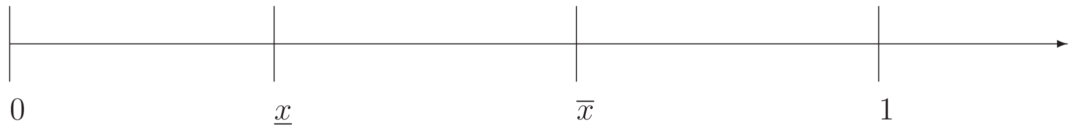

Рис. 2: Возможные положения границы при правиле голосования простым большинством

Утверждение 1. При монотонно убывающей предельной полезности стран от площади этот отрезок не пуст и $\underline{x} < \overline{x}$.

Этот результат можно легко обобщить на случай, когда решение о продаже территории принимается определенным процентом граждан государства. Очевидно, что чем меньше этот процент, тем меньше минимально возможная площадь государства.

2 Множественные устойчивые равновесия

Приведем два примера, когда устойчивое положение равновесия не единственно.

Для начала перепишем условия первого (1) и второго (2) порядка через предельные благосостояния стран

$$p_1 = \frac{\partial W_1(S_1)}{\partial S_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W_1(S_2)}{\partial S_2}, \tag{5}$$

где $S_1 = x$ и $S_2 = 1 - x$. Теперь условия равновесия границы и её устойчивости примут следующий вид

$$\text{FOC:} \quad p_1 = p_2, \tag{6}$$

$$\text{SOC:} \quad \frac{\partial p_1}{\partial S_1} + \frac{\partial p_2}{\partial S_2} \leq 0. \tag{7}$$

Переменные p_1 и p_2 обозначают максимальные (минимальные) цены, которые страны 1 и 2 могут заплатить (получить) за увеличение (уменьшение) их территорий на одну единицу площади.

Если функция благосостояния не непрерывно дифференцируемы, то её левая производная p^- может быть не равна правой производной p^+, в частности $p^- > p^+$, что не нарушает убывание предельной полезности и, следовательно, устойчивость. Условие равновесия (6) теперь примет следующий вид

$$\begin{cases} p_1^- \geq p_2^+, \\ p_1^+ \leq p_2^-. \end{cases}$$

Левая (правая) граница континуума равновесий получается, когда первое (второе) неравенство выполняется как равенство.

2.1 Присутствие транзакционных издержек

Допустим, что существуют издержки как на освоение единицы новой площади $t^+ > 0$, так и на продажу своей территории $t^- \geq 0$. Тогда левые и правые производные благосостояния по территории примут вид

$$p^+ = p - t^+, \quad p^- = p + t^-.$$

Очевидно $p^- > p^+$, что означает устойчивость всех точек равновесия, которые образуют отрезок.

2.2 Поведенческий эффект

Теория Канемана и Тверски (Kahneman, D. & A. Tversky (1979)), основанная на психологических экспериментах, утверждает, что личная функция полезности индивидуума зависит от точки отсчета (изначального его благосостояния) и обычно выпукла для потерь и вогнута для приобретений. Пример такой функции полезности приведен на рисунке 3. Из этого рисунка видно, что производная p^- больше чем p^+. Но p^- возрастает, из-за чего крайние точки равновесного отрезка могут оказаться неустойчивыми.

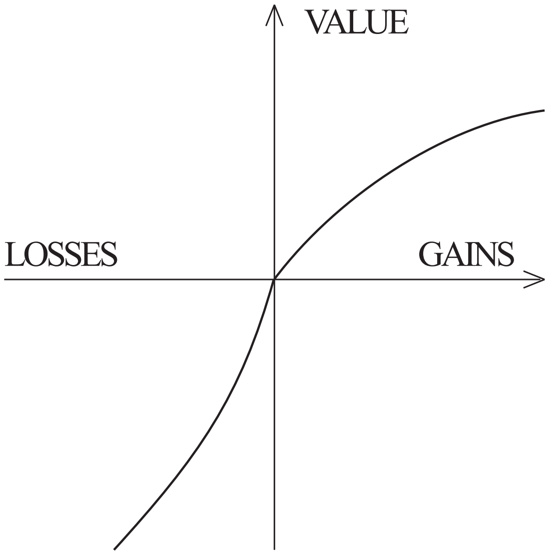

Рис. 3: Функция полезности

3 Страны на плоскости

Чтобы равновесие было единственным, далее будем предполагать, что решения в странах принимаются по правилу вето. Теперь рассмотрим двухмерный случай, где общественное благосостояние i-ой страны $W_i = W_i(S_i, L)$ зависит от её территории

$$\frac{\partial}{\partial S_i} W_i > 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial S_i^2} W_i < 0$$

и от длины её границ L

$$\frac{\partial}{\partial L}(W_1 + W_2) = -\alpha < 0. \tag{8}$$

Последнее выражение означает, что затраты на поддержание границы пропорциональны её длине и покрываются обеими приграничными странами в некоторой пропорции. Если страна 1 окружена со всех сторон страной 2, оптимальной формой

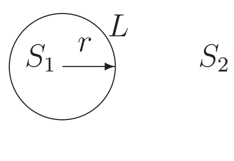

Рис. 4: Круглая страна, окруженная большой страной

границы при постоянной площади S_1 будет окружность (рис. 4). Такая форма будет одобрена всеми гражданами, так как она минимизирует расходы на содержание границы.

Утверждение 2. При введенных выше предположениях условие равновесия границы примет следующий вид

$$\text{FOC:} \quad p_1 = p_2 + \frac{\alpha}{r}, \tag{9}$$

где r – радиус границы.

Таким образом, граница находится в равновесии, когда цена земли для внутренней страны p_1 равна цене земли для внешней страны p_2 плюс цена единицы длины границы деленная на радиус границы r.

Формула (9) имеет прямую аналогию в физике с описанием процесса кипения перегретой жидкости

$$p_1 \geq p_2 + \frac{\alpha}{r^2},$$

где пузырек радиуса r может существовать, если давление газа внутри него p_1 не меньше, чем давление снаружи p_2 плюс давление поверхностного натяжения, которое обратно пропорционально квадрату радиуса кривизны поверхности пузырька. Радиус в квадрате из-за того, что трехмерный пузырек имеет двухмерную границу в отличии от нашего случая одномерной границы страны на плоскости.

4 Пример уравнения состояния

Пусть функция полезности индивидуума имеет следующий вид

$$u_j = A_j S^k, \qquad j = 1 \ldots N,$$

где S – принадлежащая группе людей территория, k – технологический параметр группы, A_j – ненормированная доля полезности j-го индивидуума в группе, N – количество людей в группе.

Предельная функция благосостояния группы:

$$p = k\, S^{k-1} \sum_{j=1}^{N} A_j = k\, \frac{N}{S} \frac{S^k}{N} \sum_{j=1}^{N} A_j = k\, n\, u, \tag{10}$$

где $n = N/S$ – концентрация людей, $u = \sum u_j/N$ – средняя полезность людей в группе. Переменные p, n и u можно рассматривать как переменные состояния, а уравнение (10) как уравнение состояния группы.

Здесь просматривается прямая аналогия с уравнением состояния идеального газа в физике, где p – давление газа, n – концентрация молекул, u – температура (средняя энергия молекул) и k – постоянная Больцмана.

Доля полезности A_j показывает, какая часть блага от общей площади приходится на индивидуума, а также уровень его пассионарности, т. е. во сколько раз он предпочитает увеличение блага от территории прибавлению денег. Следовательно, чем выше пассионарность людей в группе, тем больше средняя полезность u в группе и больше ценность территории p для группы.

5 Война вместо торговли

Предположим, что вместо того, чтобы заплатить за территорию, страна может нанять на эти деньги армию и завоевать требующуюся территорию. Что из двух вариантов будет выбрано? Война или торговля?

Похожая задача рассматривалась ранее (Grossman & Mendoza, 2001, 2004) в теории создания империй на примерах Римской, Монгольской, Османской и Нацистской империй, где выбор осуществлялся между тремя стратегиями: добровольное присоединение, вынужденное присоединение и завоевание.

Для ответа на вопрос мы рассмотрим другую теоретико-игровую модель, в которой страна может обманывать покупателя. Например взять деньги и не отдать территорию. Пусть страна 1 выбирает между двумя стратегиями: покупать или завоевывать, а страна 2 в свою очередь: обманывать или не обманывать (см. рис. 5).

Будем считать войну той же торговлей лишь с тем отличием, что продавец не получает денег за проданную территорию. Побеждает та страна, которая наймет армию

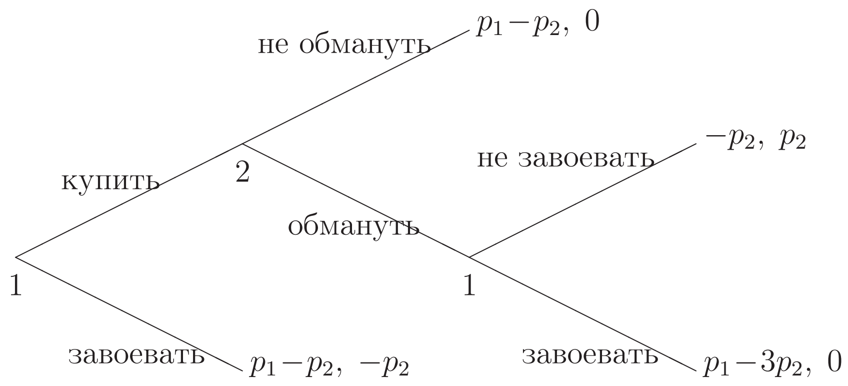

Рис. 5: Игра

больше. Армию можно рассматривать как третьего игрока, который не может сам получать полезность от площади, но может завоевать её за деньги для того, кто больше заплатит. Если страна 1 хочет завоевать часть страны 2, она платит армии чуть больше чем p_1 так как иначе страна 2 могла бы отвоевать территорию обратно заплатив p_1. Получается, что завоевание выглядит как аукцион.

Пусть территория продается за минимальную цену продавца p_2, иначе выгоднее завоевание. Страна платит армии, только если её излишек благосостояния позволяет ей победить, иначе она отступает без боя. Следовательно, страны никогда не сражаются, одна нанимает армию и оккупирует часть территории другой страны, или не нанимает армию, так как знает, что другая страна может нанять армию не меньше.

Итак, обманщик (страна 2) после получения денег может заплатить армии $p_2 + p_2$, чтобы защитить свою территорию от страны 1, которая может себе позволить нанять армию с максимальной ценой p_1. Таким образом, условие обмана $2p_2 > p_1$, это равновесие Нэша в чистых стратегиях в данной подыгре. Можно сделать вывод, что страны, граница которых находится возле положения равновесия ($p_1 \approx p_2$) всегда будут воевать за территорию, а не торговать ею, из-за боязни обмана (это равновесие Неша совершенное по подыграм, SPNE). Только те страны, которые ценят конкретную территорию как минимум вдвое больше чем их сосед, могут позволить себе покупку вместо завоевания.

6 Механизм миграции

Миграция между двумя странами происходит, также, после разрешения с обеих сторон, при условии, что полезность мигранта возрастает. При предположении об убывании функции полезности индивидуума от концентрации людей в его стране, существуют две возможности для миграции. Первая, когда индивидуум продает свою землю в стране, откуда он уезжает, и покупает в той стране, куда он эмигрирует. При этом, он свободно покидает свою страну потому, что его бывшие соотечественники получают его землю чуть дешевле, и с радостью принимается в новой стране, так как покупает там землю чуть дороже местной цены. Вторая возможность миграции выдается, когда часть территории страны, где живет индивидуум, захватывается другой страной или покупается ею. В последнем случае человек может выбирать остаться в новой стране или уехать на территорию своей прежней страны, возможно получив компенсацию от расширяющейся страны или просто из любви к родному народу. Первая возможность миграции не существует при правиле вето, так как все люди получают достаточные выплаты для компенсации потери полезности из-за сокращения площади. Следовательно, чтобы миграция существовала, далее будем считать, что используется правило большинства или происходит завоевание.

7 Пределы расширения страны

В этой главе исследуется динамика расширения круглой страны, окруженной большой страной, в которой не все граждане получают достаточную компенсацию за потерю их земель, что обычно происходит при завоевании. В таком случае некоторые предпочитают оставаться на своей земле, становясь гражданами расширяющегося государства.

Для простоты, пусть доля граждан на захваченных землях, переходящих на сторону расширяющейся страны, будет постоянной K_s. Также предположим, что постоянная доля K_d людей расширяющейся страны на новых территориях погибает. Коэффициенты K_s и K_d – экзогенны. Таким образом, общее число людей N расширяющейся

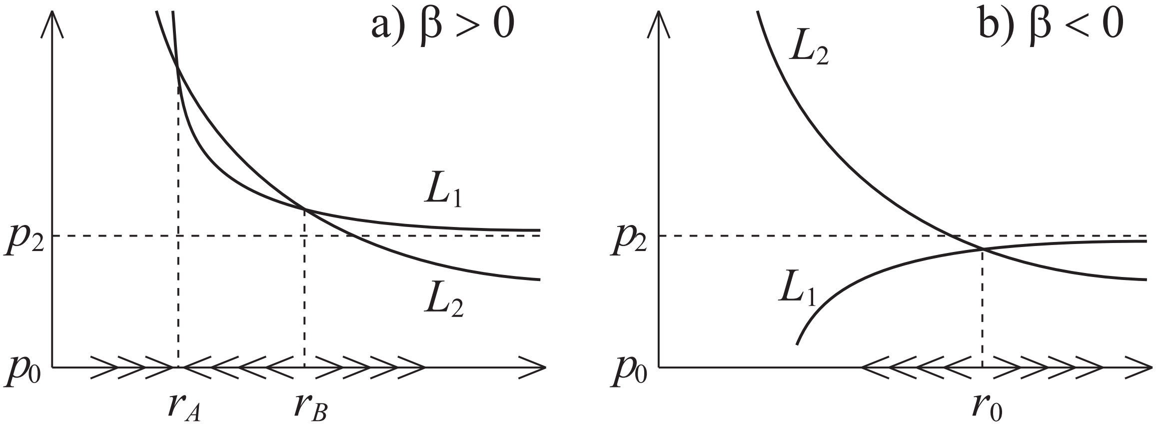

Рис. 6: Левая и правя части неравенства (13)

страны изменяется по закону

$$dN = K_s n_0 dS - K_d\, n\, dS, \tag{11}$$

где n – концентрация людей в стране, n_0 – концентрация людей в окружающей стране, а dS – приращение территории расширяющейся страны. Из выражения для количества людей $N = S\,n$ получается $dN = S\,dn + n\,dS$. Подставив последнее выражение в (11) и разделив переменные, мы получаем интегральное уравнение:

$$\int_{n_1}^{n} \frac{dn}{K_s n_0 - (1+K_d)n} = \int_{S_1}^{S} \frac{dS}{S}, \tag{12}$$

где S_1 – начальная площадь страны, n_1 – начальная концентрация людей в стране. Взяв интегралы в (12), мы получаем: $(Kn_0 - n)/(Kn_0 - n_1) = (S/S_1)^{-(1+K_d)}$, где постоянная $K = K_s/(1+K_d)$. Учитывая, что страна имеет форму круга $S/S_1 = (r/r_2)^2$, после некоторых преобразований мы приходим к выражению для концентрации людей в стране в зависимости от радиуса её территории: $n = Kn_0 + (n_1 - Kn_0)(r_1/r)^{2+2K_d}$. Подставляя это выражение в уравнение состояния (10), получаем зависимость цены земли для расширяющейся страны от её радиуса: $p = p_2 + \beta r^{-2(1+K_d)}$, где $p_2 = Kn_0kT$ – цена земли при $r \to \infty$, а коэффициент $\beta = kT(n_1 - Kn_0)r_1^{2(1+K_d)}$. Подставляя последнее выражение в (9) мы получаем условие расширения страны:

$$p_2 + \frac{\beta}{r^{2(1+K_d)}} \geq p_0 + \frac{\alpha}{r}. \tag{13}$$

Чтобы определить максимальные и минимальные возможные размеры страны изобразим значения правой L_2 и левой L_1 частей неравенства (13) на рисунке 6 в двух случаях: a) $n_1 > Kn_0$ и b) $n_1 < Kn_0$. Когда $n_1 = Kn_0$, кривая L_1 вырождается в горизонтальную линию на уровне p_2. Из обоих графиков видно, что для существования области неограниченного расширения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $p_2 > p_0$ т.е. $Kku > k_0u_0$. Это невозможно, если доля остающихся людей окружающей страны $K_s = 0$, так как при этом $K = 0$. Значит, чтобы проводить грамотную захватническую политику, нужно максимально увеличить K, т.е. надо чтобы никто из граждан расширяющейся страны не умирал и все люди на оккупированных территориях оставались в расширяющейся стране.

На графике a) в точке r_A страна находится в устойчивом равновесии, а в точке r_B – в неустойчивом. Иными словами, любое малое отклонение радиуса в большую сторону от r_B приведет к неограниченному росту площади страны, а в меньшую сторону – к уменьшению радиуса до r_A. При начальном радиусе $r_1 < r_A$ расширение страны ограничено радиусом r_A. Если кривые L_2 и L_1 не пересекаются на a), то страна неограниченно расширяется при любом начальном радиусе. На графике b) есть только неустойчивая точка равновесия r_0, которая определяет наименьший возможный радиус страны. При большем радиусе страна неограниченно расширяется. Если гиперболы L_2 и L_1 не пересекаются на b), то страна не может существовать ни при каком размере.

В режиме b) расширение происходит только за счет технического (k) и/или пассионарного (u) превосходства страны над окружением. В режиме a) страна дополнительно увеличивается из-за перевеса в концентрации людей. Однако если предположить положительную зависимость скорости расширения страны от разности внутренней и наружней цен ($L_1 - L_2$) у границы, то в случае a) неограниченное расширение будет происходить медленнее, чем в случае b) при одинаковых начальных разницах цен потому, что в случае b) значение внутренней цены L_1 растет с увеличением радиуса в отличии от a).

Можно привести примеры из истории расширения в режиме b) (когда начальная концентрация людей в расширяющейся стране меньше, чем в окружающей): завоевание европейцами Нового света и присоединение Сибири к России. Медленный режим a), видимо, характерен для длительного взаимодействия стран, у которых из-за обмена технологиями и людьми выровнялись пассионарности и уровни технического развития, но по какой то причине у одной из стран оказалась большая концентрация людей.

Выводы

Предложен новый механизм передачи территории между группами людей (например, странами) путем торговли с одобрения обоими сторонами посредством голосования по определенным правилам (правило простого большинства, правило вето, и т.п.). Показано, что возможными причинами неединственности устойчивого положения границы между странами могут быть транзакционные издержки и различные предельные полезности от потерь и приобретений.

Завоевание территории рассматривается как частный случай торговли лишь с тем отличием, что продавец не получает денег за проданную территорию. Было обнаружено, что только те страны, которые ценят конкретную территорию как минимум вдвое больше чем их сосед, могут позволить себе покупку вместо завоевания.

Рассмотрены одномерные и двухмерные случаи. В последнем случае, при стоимости содержания границы пропорциональной её длине, исследовано влияние кривизны границы на цену земли. Из функции полезности индивидуума получено уравнение состояния группы людей. Это уравнение оказалось похожим на уравнение состояния идеального газа. При определенных правилах миграции проведена оценка радиусов минимально и максимально возможных площадей, занимаемых небольшой группой людей, в окружении другой большой группы. Приведены аналогии случая b) в физике с процессом кипения перегретой жидкости.

Данную работу можно продолжить, сделав эндогенной долю K_S людей переходящих на сторону расширяющейся группы.

Приложение

Доказательство утверждения 1.

Пусть $\underline{x} \geq \overline{x}$. Тогда, из монотонного убывания предельной полезности ($W_1''(x) < 0, W_2''(x) < 0 \; \forall x \in [0,1]$) получаем

$$W_1'(\underline{x}) \leq W_1'(\overline{x}) \quad W_2'(\underline{x}) \leq W_2'(\overline{x})$$

подставляя сюда

$$W_1'(\overline{x}) = -\frac{1}{2}W_2'(\overline{x}), \quad W_2'(\underline{x}) = -\frac{1}{2}W_1'(\underline{x})$$

из (3) и (4), после суммирования получаем

$$W_1'(\underline{x}) \leq W_2'(\overline{x}),$$

противоречие, так как $W_2'(\overline{x}) < 0$ и $W_1'(\underline{x}) > 0$. Следовательно, $\underline{x} < \overline{x}$.

Доказательство утверждения 2.

$$FOC: \quad d(W_1 + W_2) = 0,$$

$$dW_i(S_i, L) = \frac{\partial W_i}{\partial S_i} dS_i + \frac{\partial W_i}{\partial L} dL.$$

Учитывая (5) и (8), после суммирования получаем

$$d(W_1 + W_2) = p_1 \, dS_1 + p_2 \, dS_2 - \alpha dL.$$

Из геометрии задачи мы получаем выражения $dS_2 = -dS_1$ и $dL = \frac{dS_1}{r}$; после подстановки и деления на dS_1 получаем $p_1 - p_2 - \frac{\alpha}{r} = 0$, и следовательно (9).

Список литературы

Беляков, А. О. (2007). ”О математическом описании процессов развития объединений людей (этносов, коллективов фирм и т.п.)”, *Экономика и мат. методы* №43(2), 118–122.

Гумилев, Л. Н. (1979). ”Этногенез и биосфера Земли” М., ВИНИТИ, (№1001, 3734, 3735).

Alesina, A. and E. Spolaore (1997). ”On the Number and Size of Nations”, *Quarterly Journal of Economics* Vol. 113, 1027–1056.

Bewley, T. F. (1981). ”A Critique of Tiebout’s Theory of Local Public Expenditures”, *Econometrica* 49(3), 713–740.

Bolton, P. and G. Roland (1997). ”The Break-up of Nations”, *Quarterly Journal of Economics* Vol. 131, 1057–1090.

Grossman, H. I. and J. Mendoza (2001). ”Annexation or Conquest? The Economics of Empire Building”, *NBER Working Paper* No. 8109.

Grossman, H. I. and J. Mendoza (2001a). ”Butter and guns: Complementarity between economic and military competition”, *Economics of Governance* Vol. 2(1), 25–33.

Grossman, H. I. and J. Mendoza (2004). ”Peace and War in Territorial Disputes”, *NBER Working Paper* No. 10601.

Kahneman, D. and A. Tversky (1979). ”Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk”, *Econometrica* Vol. 47(2), 263–292.

Tiebout, C. M. (1956). ”A Pure Theory of Local Expenditures”, *The Journal of Political Economy* Vol. 64(5), 416–424.