

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ

А.О. Беляков

Рассматривается задача определения параметров линейной колебательной системы с n степенями свободы по параметрам её решения. Предполагается, что параметры решения определяются по наблюдаемому сигналу с реальной динамической системы при помощи методов идентификации, как это было сделано в [1].

Вначале приводится решение для консервативной системы. На его основе при помощи асимптотических методов решается задача для неконсервативной системы с матрицей демпфирования определенной структуры, включающей малый параметр.

Консервативная система. Постановка задачи: найти матрицы $M=M^T>0$ и $K=K^T>0$ системы

$$M\ddot{x} + Kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1)$$

где x_0 и v_0 – векторы начальных смещений и скоростей. Известны параметры решения

$$x(t) = U \left(e^{i(\Omega t + \Theta)} + e^{-i(\Omega t + \Theta)} \right) t/2, \quad (2)$$

где U – матрица, составленная из векторов форм колебаний, Ω и Θ – диагональные матрицы частот и фаз колебаний, t – вектор, составленный из единиц. Фазы Θ выбраны так, чтобы векторы форм колебаний и, следовательно, матрица U были действительными. Известно [2], что преобразование с матрицей U переводит систему (1) в нормальные координаты

$$U^T M U = M', \quad U^T K U = K' = M' \Omega^2, \quad (3)$$

где матрицы M' и K' диагональные. Начальные условия преобразуются по формулам $x'_0 = U^{-1}x_0$ и $v'_0 = U^{-1}v_0$, их компоненты выражаются из решения (2) в простом виде

$$(x'_0)_j = \cos \Theta_{jj}, \quad (v'_0)_j = -\Omega_{jj} \sin \Theta_{jj}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Из (3) получаются выражения для матриц системы (1):

$$K = (U^{-1})^T M' \Omega^2 U^{-1}, \quad M = (U^{-1})^T M' U^{-1}. \quad (5)$$

Нам нужно дополнительно n независимых условий для определения матрицы M' или K' . Рассмотрим варианты таких условий.

а) Если известен импульс $p = Mv_0$, переданный системе в начальный момент времени, то, перейдя в нормальные координаты, получаем:

$$M'_{jj} = -p'_j / (\Omega_{jj} \sin \Theta_{jj}), \quad \text{где } p' = (U^T)^{-1} p.$$

б) Аналогично, если известна сила $f = Kx_0$, при помощи которой система была выведена из равновесия, то $K'_{jj} = f'_j / \cos \Theta_{jj}$, где $f' = (U^T)^{-1} f$.

с) Если каким-то образом известны энергии мод колебаний $2e_j = K'_{jj} (x'_0)_j^2 + M'_{jj} (v'_0)_j^2$, то из выражений (4) следует что $K'_{jj} = 2e_j$.

д) Из с) следует, что если известны и сила и импульс, то можно использовать оба эти вектора, записав выражение для энергии мод колебаний

$$(p'_j)^2 / M'_{jj} + (f'_j)^2 / K'_{jj} = 2e_j = K'_{jj},$$

откуда получаем $K'_{jj} = \sqrt{(p'_j)^2 \Omega_{jj}^2 + (f'_j)^2}$

Таким образом, найдя матрицы K' и $M' = \Omega^{-2} K'$, получаем матрицы системы (1) из выражений (5).

Неконсервативная система. Путь в систему (1) добавлены линейные диссипативные силы, характеризуемые матрицей демпфирования определенной структуры. Постановка задачи: найти матрицы M , D и K системы

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \quad (6)$$

если известны параметры решения

$$x(t) = V e^{(\Lambda t + i\Theta)} t/2 + \bar{V} e^{(\bar{\Lambda} t - i\Theta)} t/2, \quad (7)$$

а матрица демпфирования имеет следующую структуру $U^T D U = 2M'(\Gamma + \varepsilon G)$, где Γ – диагональная матрица, а $G_{jj} = 0$; \bar{V} – матрица комплексно-сопряженных векторов форм колебаний, Λ – диагональная матрица собственных значений λ_k . Подберём фазы Θ так, чтобы сумма квадратов мнимых частей компонент V была минимальной

$$\Theta_{jj} = \arg \min_{0 \leq \Theta_{jj} < 2\pi} \sum_{j,k=1}^n \left[\operatorname{Im} \left(V_{kj} e^{i\Theta_{jj}} \right) \right]^2. \text{ Чтобы решить эту задачу,}$$

найдем выражения для U и Ω через параметры решения (7), после чего можно воспользоваться выражениями (5), полученными для консервативной системы (1).

При $\varepsilon = 0$ очевидно, что $U = V = \bar{V}$, и система (6) распадается в нормальных координатах системы (1) на n независимых осцилляторов с диссипацией $\ddot{x}'_k + 2\gamma_k \dot{x}'_k + \omega_k^2 x' = 0$, где γ_k и ω_k – диагональные элементы матриц Γ и Ω . Тогда из выражения для собственного значения этого дифференциального уравнения $\lambda_{k|\varepsilon=0} = -\gamma_k + i\sqrt{\omega_k^2 - \gamma_k^2}$ получаем простую формулу для определения частот системы (1): $\omega_k = |\lambda_{k|\varepsilon=0}|$, где $\lambda_{k|\varepsilon=0}$ – собственное значение системы (6) при условии $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon > 0$ матрицу векторов форм колебаний V уже нельзя выбрать действительной. Согласно теории

возмущений несамосопряженных операторов [3] при некрatных $\lambda_{k|\varepsilon=0}$ приращения собственных значений и векторов выражаются в виде рядов по целым степеням ε . Покажем, что в данной постановке задачи приращение собственных значений имеет второй порядок малости по ε : $\lambda_k = \lambda_{k|\varepsilon=0} + o(\varepsilon)$. Для этого запишем определитель характеристического уравнения

$$(E\lambda^2 + 2(\Gamma + \varepsilon G)\lambda + \Omega^2)v' = 0 \quad (8)$$

системы (6) в нормальных координатах системы (1):

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\gamma_1\lambda + \omega_1^2 & & 2\varepsilon G_{k1}\lambda \\ & \ddots & \\ 2\varepsilon G_{kj}\lambda & & \lambda^2 + 2\gamma_n\lambda + \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_{k|\varepsilon=0})(\lambda - \bar{\lambda}_{k|\varepsilon=0}) + o(\varepsilon) = 0. \text{ Отсюда видно, что}$$

$$\text{при некрatных } \lambda_{k|\varepsilon=0}: \lambda_k = \lambda_{k|\varepsilon=0} + o(\varepsilon), \quad (9)$$

где v' – столбец матрицы $V' = U^{-1}V$.

Тогда формула для определения частот системы (1) примет вид: $\omega_k = |\lambda_k| + o(\varepsilon)$ или $\Omega_{kk} = |\Lambda_{kk}| + o(\varepsilon)$.

Мы хотели бы получить матрицу U также с точностью до $o(\varepsilon)$. Для этого найдем первое приращение y_j вектора форм колебаний системы (6)

$$v'_j = e_j + \varepsilon y_j + o(\varepsilon) \quad (11)$$

в нормальных координатах системы (1), где e_j – j -ый базисный вектор. Из условия нормировки $(e_j, y_j) = 0$ следует, что $(y_j)_j = Y_{jj} = 0$. Подставляя (9) и (11) в (8) и учитывая, что $(E\lambda_{j|\varepsilon=0}^2 + 2(\Gamma + \varepsilon G)\lambda_{j|\varepsilon=0} + \Omega^2)e_j = 0$, после несложных преобразований получаем:

$$Y_{kj} = -2G_{kj} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_j - \bar{\lambda}_k)} + O(\varepsilon) \text{ при } k \neq j. \quad (12)$$

В частности [4], если $\|\Gamma\| = O(\varepsilon)$ компоненты вектора y_j

чисто мнимые: $Y_{kj} = -2G_{kj} \frac{i\omega_j}{\omega_k^2 - \omega_j^2} + O(\varepsilon)$. Распишем

выражение $V = U \cdot V'$ для мнимых и действительных составляющих: $V^R + iV^I = U(E + \varepsilon Y^R + i\varepsilon Y^I + o(\varepsilon))$, где

$V^R = \text{Re}V$, $V^I = \text{Im}V$, $Y^R = \text{Re}Y$, $Y^I = \text{Im}Y$. Получаем два матричных уравнения

$$\begin{cases} U^{-1}V^R = E + \varepsilon Y^R + o(\varepsilon) \\ U^{-1}V^I = \varepsilon Y^I + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (13)$$

Заметим из (12), что отношение

$$\frac{Y_{kj}^R}{Y_{kj}^I} = \frac{\gamma_j(1 + \omega_k^2/\omega_j^2) - 2\gamma_k}{(1 - \omega_k^2/\omega_j^2)\sqrt{\omega_j^2 - \gamma_j^2}} + O(\varepsilon) \text{ при } k \neq j \quad (14)$$

не зависит от G . Из уравнений (13) и (14) однозначно определяются компоненты матриц Y и U^{-1} . После этого находятся компоненты матриц G и Γ :

$$G_{kj} = -\text{Re} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_j - \bar{\lambda}_k)}{2\lambda_j} Y_{kj} + O(\varepsilon), \quad \Gamma = -\text{Re} \Lambda + o(\varepsilon),$$

через которые находится матрица D :

$$D = (U^{-1})^T M^{-2} (\Gamma + \varepsilon G) U^{-1} + o(\varepsilon).$$

Матрицы M и K определяются по формулам (5) также с точностью до $o(\varepsilon)$, где матрица Ω находится из выражения (10).

Таким образом, мы определили матрицы системы (6) с точностью до второго порядка малости составляющих диссипативных сил, которые связывают моды колебаний

между собой, по сравнению с инерционными и упругими силами. При этом диссипация внутри мод колебаний не предполагалась малой в отличие от [4]. Это расширяет класс исследуемых динамических систем и увеличивает точность определения их матриц инерции, жесткости и демпфирования. Представленные результаты были применены в [5] для создания алгоритмов определения моментов инерции крупногабаритных тел на измерительном стенде, разработанном в ЦАГИ [6].

Список использованных источников

1. *Беляков А.О., Блаженнова-Микулич Л.Ю.* Идентификация инерционной матрицы консервативной колебательной системы // Вестн. Моск. ун-та. сер. 1, Математика механика. 2005. №3, С. 25–28.
2. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1983. 328 с.
3. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. // УМН. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 1966.
5. *Беляков А.О.* Определение моментов инерции крупногабаритных тел по колебаниям в упругом подвесе. Диссертация на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук, Москва, 2005.
6. *Богданов В.В., Волобуев В.С., Кудряшов А.И.* Комплекс для измерения массы, координат центра масс и моментов инерции машиностроительных изделий // Измерительная техника, 2002. №2.