ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ

А.О. Беляков

Рассматривается задача определения параметров линейной колебательной системы с n степенями свободы по параметрам её решения. Предполагается, что параметры решения определяются по наблюдаемому сигналу с реальной динамической системы при помощи методов идентификации, как это было сделано в [1].

Вначале приводится решение для консервативной системы. На его основе при помощи асимптотических методов решается задача для неконсервативной системы с матрицей демпфирования определенной структуры, включающей малый параметр.

Консервативная система. Постановка задачи: найти матрицы $M=M^T>0$ и $K=K^T>0$ системы

$$M\ddot{x}+Kx=0,\quad x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=v_0, \tag{1}$$

где x_0 и v_0 – векторы начальных смещений и скоростей. Известны параметры решения

$$x(t)=U\left(e^{i(\Omega t+\Theta)}+e^{-i(\Omega t+\Theta)}\right)\iota/2, \tag{2}$$

где U – матрица, составленная из векторов форм колебаний, Ω и Θ – диагональные матрицы частот и фаз колебаний, ι – вектор, составленный из единиц. Фазы Θ выбраны так, чтобы векторы форм колебаний и, следовательно, матрица U были действительными. Известно [2], что преобразование с матрицей U переводит систему (1) в нормальные координаты

$$U^T M\,U=M',\quad U^T K\,U=K'=M'\Omega^2, \tag{3}$$

где матрицы M' и K' диагональные. Начальные условия преобразуются по формулам $x_0'=U^{-1}x_0$ и $v_0'=U^{-1}v_0$, их компоненты выражаются из решения (2) в простом виде

$$\left(x_0'\right)_j=\cos\Theta_{jj},\quad \left(v_0'\right)_j=-\Omega_{jj}\sin\Theta_{jj},\quad j=1,\dots,n. \tag{4}$$

Из (3) получаются выражения для матриц системы (1):

$$K=\left(U^{-1}\right)^T M'\Omega^2U^{-1},\quad M=\left(U^{-1}\right)^T M'U^{-1}. \tag{5}$$

Нам нужно дополнительно n независимых условий для определения матрицы M' или K'. Рассмотрим варианты таких условий.

a) Если известен импульс $p=Mv_0$, переданный системе в начальный момент времени, то, перейдя в нормальные координаты, получаем: $M'_{jj}=-p'_j\big/\left(\Omega_{jj}\sin\Theta_{jj}\right)$, где $p'=\left(U^T\right)^{-1}p$.

b) Аналогично, если известна сила $f=Kx_0$, при помощи которой система была выведена из равновесия, то $K'_{jj}=f'\big/\cos\Theta_{jj}$, где $f'=\left(U^T\right)^{-1}f$.

c) Если каким-то образом известны энергии мод колебаний $2e_j=K'_{jj}\left(x_0'\right)_j^2+M'_{jj}\left(v_0'\right)_j^2$, то из выражений (4) следует что $K'_{jj}=2e_j$.

d) Из c) следует, что если известны и сила и импульс, то можно использовать оба эти вектора, записав выражение для энергии мод колебаний

$$\left(p_j'\right)^2\big/M'_{jj}+\left(f_j'\right)^2\big/K'_{jj}=2e_j=K'_{jj},$$

откуда получаем $K'_{jj}=\sqrt{\left(p_j'\right)^2\Omega_{jj}^2+\left(f_j'\right)^2}$

Таким образом, найдя матрицы K' и $M'=\Omega^{-2}K'$, получаем матрицы системы (1) из выражений (5).

Неконсервативная система. Путь в систему (1) добавлены линейные диссипативные силы, характеризуемые матрицей демпфирования определенной структуры. Постановка задачи: найти матрицы *M, D* и *K* системы

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \qquad (6)$$

если известны параметры решения

$$x(t) = V\,\mathrm{e}^{(\Lambda t + i\Theta)}\,\iota/2 + \bar{V}\,\mathrm{e}^{(\bar{\Lambda} t - i\Theta)}\,\iota/2\,, \qquad (7)$$

а матрица демпфирования имеет следующую структуру $U^T DU = 2M'(\Gamma + \varepsilon G)$, где Γ – диагональная матрица, а $G_{jj} = 0$; $\bar{V}$ – матрица комплексно-сопряженных векторов форм колебаний, Λ – диагональная матрица собственных значений λ_k. Подберём фазы Θ так, чтобы сумма квадратов мнимых частей компонент *V* была минимальной $\Theta_{jj} = \arg\min\limits_{0 \le \Theta_{jj} < 2\pi} \sum\limits_{j,k=1}^{n} \left[\operatorname{Im}\left(V_{kj}\,\mathrm{e}^{i\Theta_{jj}}\right)\right]^2$. Чтобы решить эту задачу, найдем выражения для *U* и Ω через параметры решения (7), после чего можно воспользоваться выражениями (5), полученными для консервативной системы (1).

При $\varepsilon = 0$ очевидно, что $U = V = \bar{V}$, и система (6) распадается в нормальных координатах системы (1) на *n* независимых осцилляторов с диссипацией $\ddot{x}'_k + 2\gamma_k \dot{x}'_k + \omega_k^2 x' = 0$, где γ_k и ω_k – диагональные элементы матриц Γ и Ω. Тогда из выражения для собственного значения этого дифференциального уравнения $\lambda_{k|\varepsilon=0} = -\gamma_k + i\sqrt{\omega_k^2 - \gamma_k^2}$ получаем простую формулу для определения частот системы (1): $\omega_k = \left|\lambda_{k|\varepsilon=0}\right|$, где $\lambda_{k|\varepsilon=0}$ – собственное значение системы (6) при условии $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon > 0$ матрицу векторов форм колебаний *V* уже нельзя выбрать действительной. Согласно теории

возмущений несамосопряженных операторов [3] при некратных $\lambda_{k|\varepsilon=0}$ приращения собственных значений и векторов выражаются в виде рядов по целым степеням ε. Покажем, что в данной постановке задачи приращение собственных значений имеет второй порядок малости по ε: $\lambda_k = \lambda_{k|\varepsilon=0} + o(\varepsilon)$. Для этого запишем определитель характеристического уравнения

$$\left(E\lambda^2 + 2(\Gamma + \varepsilon G)\lambda + \Omega^2\right)v' = 0 \qquad (8)$$

системы (6) в нормальных координатах системы (1):

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\gamma_1\lambda + \omega_1^2 & & 2\varepsilon G_{kj}\lambda \\ & \ddots & \\ 2\varepsilon G_{kj}\lambda & & \lambda^2 + 2\gamma_n\lambda + \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\lambda - \lambda_{k|\varepsilon=0}\right)\left(\lambda - \bar{\lambda}_{k|\varepsilon=0}\right) + o(\varepsilon) = 0$. Отсюда видно, что при некратных $\lambda_{k|\varepsilon=0}$: $\lambda_k = \lambda_{k|\varepsilon=0} + o(\varepsilon)$, (9)

где v' - столбец матрицы $V' = U^{-1}V$.

Тогда формула для определения частот системы (1) примет вид: $\omega_k = \left|\lambda_k\right| + o(\varepsilon)$ или $\Omega_{kk} = \left|\Lambda_{kk}\right| + o(\varepsilon)$. (10)

Мы хотели бы получить матрицу *U* также с точностью до $o(\varepsilon)$. Для этого найдем первое приращение y_j вектора форм колебаний системы (6)

$$v'_j = e_j + \varepsilon y_j + o(\varepsilon) \qquad (11)$$

в нормальных координатах системы (1), где e_j – *j*-ый базисный вектор. Из условия нормировки $\left(e_j, y_j\right) = 0$ следует, что $\left(y_j\right)_j = Y_{jj} = 0$. Подставляя (9) и (11) в (8) и учитывая, что $\left(E\lambda_{j|\varepsilon=0}^2 + 2(\Gamma + \varepsilon G)\lambda_{j|\varepsilon=0} + \Omega^2\right)e_j = 0$, после несложных преобразований получаем:

$$Y_{kj} = -2G_{kj}\frac{\lambda_j}{\left(\lambda_j-\lambda_k\right)\left(\lambda_j-\bar{\lambda}_k\right)} + O\left(\varepsilon\right) \text{ при } k \neq j. \quad (12)$$

В частности [4], если $\left\|\Gamma\right\| = O\left(\varepsilon\right)$ компоненты вектора y_j чисто мнимые: $Y_{kj} = -2G_{kj}\dfrac{i\omega_j}{\omega_k^2-\omega_j^2} + O\left(\varepsilon\right)$. Распишем выражение $V = U\cdot V'$ для мнимых и действительных составляющих: $V^R + iV^R = U\left(E+\varepsilon Y^R + i\varepsilon Y^I + o\left(\varepsilon\right)\right)$, где $V^R = \operatorname{Re}V$, $V^I = \operatorname{Im}V$, $Y^R = \operatorname{Re}Y$, $Y^I = \operatorname{Im}Y$. Получаем два матричных уравнения

$$\begin{cases} U^{-1}V^R = E+\varepsilon Y^R + o\left(\varepsilon\right) \\ U^{-1}V^I = \varepsilon Y^I + o\left(\varepsilon\right) \end{cases} \quad (13)$$

Заметим из (12), что отношение

$$\frac{Y_{kj}^R}{Y_{kj}^I} = \frac{\gamma_j\left(1+\omega_k^2/\omega_j^2\right)-2\gamma_k}{\left(1-\omega_k^2/\omega_j^2\right)\sqrt{\omega_j^2-\gamma_j^2}} + O\left(\varepsilon\right) \text{ при } k \neq j \quad (14)$$

не зависит от G. Из уравнений (13) и (14) однозначно определяются компоненты матриц Y и U^{-1}. После этого находятся компоненты матриц G и Г:

$$G_{kj} = -\operatorname{Re}\frac{\left(\lambda_j-\lambda_k\right)\left(\lambda_j-\bar{\lambda}_k\right)}{2\lambda_j}Y_{kj} + O\left(\varepsilon\right), \quad \Gamma = -\operatorname{Re}\Lambda + o\left(\varepsilon\right),$$

через которые находится матрица D:

$$D = \left(U^{-1}\right)^T M'2\left(\Gamma+\varepsilon G\right)U^{-1} + o\left(\varepsilon\right).$$

Матрицы M и K определяются по формулам (5) также с точностью до $o\left(\varepsilon\right)$, где матрица Ω находится из выражения (10).

Таким образом, мы определили матрицы системы (6) с точностью до второго порядка малости составляющих диссипативных сил, которые связывают моды колебаний между собой, по сравнению с инерционными и упругими силами. При этом диссипация внутри мод колебаний не предполагалась малой в отличие от [4]. Это расширяет класс исследуемых динамических систем и увеличивает точность определения их матриц инерции, жесткости и демпфирования. Представленные результаты были применены в [5] для создания алгоритмов определения моментов инерции крупногабаритных тел на измерительном стенде, разработанном в ЦАГИ [6].

Список использованных источников

1. *Беляков А.О., Блаженнова-Микулич Л.Ю.* Идентификация инерционной матрицы консервативной колебательной системы // Вестн. Моск. ун-та. сер. 1, Математика механика. 2005. №3, С. 25–28.
2. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1983. 328 с.
3. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. // УМН. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 1966.
5. *Беляков А.О.* Определение моментов инерции крупногабаритных тел по колебаниям в упругом подвесе. Диссертация на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук, Москва, 2005.
6. *Богданов В.В., Волобуев В.С., Кудряшов А.И.* Комплекс для измерения массы, координат центра масс и моментов инерции машиностроительных изделий // Измерительная техника, 2002. №2.