



УДК 53.082.13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МАССИВНЫХ ТЕЛ ПО ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ

Copyright © 2003, А. О. Беляков

Исследуется новый метод измерения моментов инерции массивных тел, предложенный В. В. Богдановым. На его основе в Центральном аэрогидродинамическом институте спроектирован специальный измерительный стенд. В данной работе представлен алгоритм обработки данных со стенда. Показано, что при такой конструкции стенда алгоритм позволяет определить не только главные моменты инерции, но все динамические параметры твердого тела: тензор инерции (без одной компоненты), массу и положение центра масс. Проведен анализ чувствительности полученных аналитических выражений для динамических параметров к погрешности входных данных ■

А. О. Беляков

аспирант 3-го года механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель д.ф.-м.н. А. П. Сейранян

Anton O. Belyakov

Determination of Dynamical Parameters of Massive Bodies by Oscillation Modes

A new measurement method of inertia moments suggested by V. V. Bogdanov is investigated. Based on this method in the Central Aerohydrodynamic Institute a stand for measurement is constructed. In this work a data operation algorithm is presented. It is shown that with such stand scheme this algorithm allows to determine not only the general inertia moments but all dynamical parameters of the body: inertia tensor (without one component), mass and mass center position. Sensitivity analysis of analytical expressions for dynamical body parameters to input data errors is proceeded ■

1. Устройство стенда

Стенд сконструирован для измерения динамических параметров тел цилиндрической формы массой до 15000 кг, длиной ~ 6 м, диаметром ~ 2 м. Тело при помощи специальных хомутов помещается на четыре пружины, закрепленные другим концом на бетонном основании. В точках крепления пружин к хомутам (1, 2, 3, см. рис. 1) расположены датчики, измеряющие вертикальное смещение. Чтобы эти точки не смещались горизонтально, в конструкции стенда предусмотрены направляющие втулки. Таким образом, движение системы возможно только по трем степеням свободы из шести. В начальный момент измерений к телу приложена сила в вертикальном направлении (рис. 1), при этом система неподвижна. Затем сила мгновенно устраняется, и система приходит в движение. После обработки сигнала, полученного с трех датчиков, определяются три частоты колебаний и по три амплитуды колебаний на каждый датчик. Для удобства анализа результаты полученные данные представлены в виде таблицы 1.

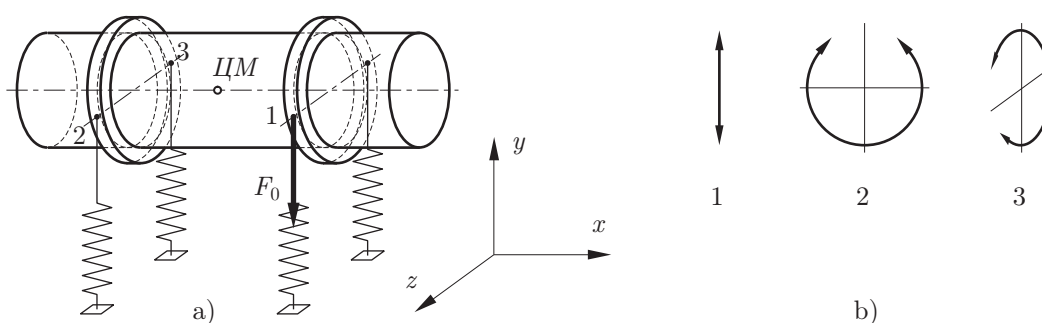


Рис. 1 Схема экспериментального стенда (а) и формы колебаний (б)

Таблица 1.

Формы колебаний	Частоты форм колебаний	Амплитуды форм колебаний сигнала		
		Датчик 1	Датчик 2	Датчик 3
1. Вдоль OY	ω_1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}
2. Вокруг OZ	ω_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}
3. Вокруг OX	ω_3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}

2. Определение инерционной матрицы колебательной системы по формам колебаний

Рассмотрим колебания консервативной системы размерности n , описываемой уравнением

$$A\ddot{x} + Cx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2.1)$$

где A — инерционная матрица, C — матрица жесткости, обе симметрические и положительно определенные. Решение системы (1.1) имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^n h_i \cos(\omega_i t), \quad (2.2)$$

где ω_i — частоты колебаний, h_i — векторы форм колебаний. Предполагается, что известен вектор обобщенных сил f , вызывающих начальные смещения x_0 .

Известно, что в базисе из векторов форм колебаний матрицы A и C имеют диагональный вид. Из формулы $(C - A\omega_i^2)h_i = 0$ видно, что векторы h_i определяются с точностью до множителя. Обычно их выбирают такими, чтобы матрица A была единичной. Но в нашем случае абсолютные величины векторов h_i определяются начальными условиями, как видно из формулы (2.1).

Из векторов форм колебаний h_i можно составить невырожденную квадратную матрицу H . Применяя формулу для преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису, получаем следующие выражения:

$$H^T A H = \mu, \quad (2.3)$$

$$H^T C H = \mu \omega^2, \quad (2.4)$$

где $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$, $\omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$, μ_i — обобщенные массы.

Из (2.2) следует:

$$A = (H^T)^{-1} \mu H^{-1}. \quad (2.5)$$

Таким образом, нахождение инерционной матрицы A сводится к нахождению вектора $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$ обобщенных масс. Для этого воспользуемся знанием обобщенной силы f , которая связана с начальным смещением x_0 следующим выражением:

$$f = Cx_0. \quad (2.6)$$

Из решения (2.1) при $t = 0$ получаем $x_0 = \sum_{i=1}^n h_i$, или

$$x_0 = H[1 \ \dots \ 1]^T. \quad (2.7)$$

Подставим (3.3) в (3.2) и умножим полученное выражение слева на H^T :

$$h^T f = H^T C H [1 \ \dots \ 1]^T.$$

Воспользуемся далее выражением (2.3), и учитывая, что матрица $\mu \omega^2$ диагональная, после несложных преобразований получаем выражение, определяющее обобщенные массы:

$$\mu_i = \frac{1}{\omega_i^2} \sum_{k=1}^n H_{ki} f_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Заметим, что в выражениях (3.1) и (3.4) для определения матрицы A не нужно знать матрицу жесткости C , что облегчает практическое применение данного способа. Более того, согласно (2.3) матрицу C можно определить следующим образом:

$$C = (H^T)^{-1} \text{diag} \left\{ \sum_{k=1}^n H_{ki} f_k, \quad i = 1, \dots, n \right\} H^T.$$

Итак, мы показали, что при помощи выражений (3.1) и (3.4) можно определить инерционную матрицу динамической системы (1.1) с любым числом степеней свободы. Для этого нужно знать собственные частоты, векторы форм колебаний и обобщенную силу, вызвавшую начальное смещение системы от положения равновесия.

Применим эту технику для определения динамических параметров тела на рассматриваемом стенде.

3. Определение динамических параметров тела

При отсутствии трения малые колебания системы измерительного стенда описывается уравнением (1.1) размерности $n = 3$. За обобщенные координаты принимаются вертикальное смещение центра масс тела и углы поворота тела вокруг осей OZ и OX . Инерционная матрица системы в этом случае имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz} & I_{zx} \\ 0 & I_{xz} & I_{xx} \end{pmatrix},$$

где M — масса тела; I_{xx}, I_{zx}, I_{zz} — компоненты тензора инерции. Учитывая геометрию стенда, можно записать матрицу преобразования измеренных смещений на трех датчиках в выбранные обобщенные координаты:

$$L = \begin{pmatrix} 1 - r_x L_x^{-1} & r_x L_x^{-1} - r_z L_z^{-1} & r_z L_z^{-1} \\ -L_x^{-1} & L_z^{-1} & 0 \\ 0 & L_z^{-1} & -L_z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь r_z, r_x — координаты центра масс по осям OZ и OX , L_z, L_x — базы стенда по осям OZ и OX (т. е. расстояние от точки 3 до точки 2 и от точки 2 до точки 1). Тогда матрица H определяется следующим образом:

$$H = LY,$$

где Y — матрица, составленная из амплитуд сигналов с датчиков, см. таблицу 1.

Теперь, воспользовавшись формулами (3.1) и (3.4), можно получить аналитические выражения для элементов матрицы A . Координаты центра масс r_z и r_x входят линейно в выражения для элементов A_{12} и A_{13} , которые должны равняться нулю. Следовательно, r_z и r_x можно выразить из уравнений $A_{12} = 0$ и $A_{13} = 0$. Подставим выражение для координат центра масс в выражения для моментов инерции. В выражение для массы координаты центра масс не входят. Теперь динамические параметры тела выражены через элементы матрицы Y , частоты колебаний $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, базы стенда L_z, L_x и силу f_0 , вызывающую начальное смещение.

Повернув тело вокруг оси OX на 90° и проделав измерения заново, найдем третью координату центра масс и еще два компонента тензора инерции. Из-за громоздкости конечные выражения для динамических параметров не приводятся.

4. Анализ чувствительности и пример вычислений

Наличие аналитических выражений позволяет провести анализ чувствительности динамических параметров к точности входных данных, используя формулу

$$\Delta \zeta_i = \sum_{j=1}^{15} \frac{\partial \zeta_i(\xi)}{\partial \xi_j} \Delta \xi_j, \quad i = 1, \dots, 6, \tag{4.1}$$

$$\xi = [|f_0|, L_x, L_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}, Y_{31}, Y_{32}, Y_{33}]^T,$$

$$\zeta = [M, r_x, r_z, I_{xx}, I_{zx}, I_{zz}]^T.$$

Для примера, в таблице 2 приведены входные параметры с погрешностями. Параметры получены из компьютерной эмуляции колебаний тела на четырех пружинах [2]. При эмуляции колебаний учитывались геометрические нелинейности и гироскопические силы. Для определения частот и амплитуд сигнала использовался метод Прони. По этим данным посчитаны динамические параметры и их погрешности из формулы (3.5). Результаты представлены в таблице 3. Абсолютные погрешности моментов инерции одинаковы. Но из-за того, что момент I_{xz} мал, его относительная погрешность велика. Как видно из таблицы 3 в данном случае погрешности определения диагональных компонент тензора инерции не превосходят 0.1%, что удовлетворяет требованиям, предъявленным к данному стенду. Обеспечение надлежащей точности входных параметров, представленных в таблице 2, является отдельной задачей и в данной работе не рассматривается. Можно лишь заметить, что она зависит от качества датчиков, количества точек в сигнале и удачно подобранной возбуждающей силы, так чтобы амплитуды трех мод колебаний на каждом датчике были по возможности равными.

Таблица 2.

Параметры		Значения	Относительные погрешности, %
Сила	$ f_0 $	1000 Н	0.01
Базы стенда	L_x	2 м	0.1
	L_z	1.74 м	0.1
Частоты колебаний	ω_1	13.2 рад/с	0.01
	ω_2	16.84 рад/с	0.01
	ω_3	28.3 рад/с	0.01
Амплитуды трех форм колебаний на трех датчиках	Y_{11}	$-4.01 \cdot 10^{-4}$ м	0.1
	Y_{12}	$2.08 \cdot 10^{-4}$ м	0.1
	Y_{13}	$-1.44 \cdot 10^{-4}$ м	0.1
	Y_{21}	$-2.04 \cdot 10^{-4}$ м	0.1
	Y_{22}	$-6.79 \cdot 10^{-4}$ м	0.1
	Y_{23}	$-1.28 \cdot 10^{-4}$ м	0.1
	Y_{31}	$-6.61 \cdot 10^{-5}$ м	0.1
	Y_{32}	$-5.40 \cdot 10^{-4}$ м	0.1
	Y_{33}	$2.68 \cdot 10^{-4}$ м	0.1

Таблица 3.

Параметры		Значения	Относительные погрешности, %
Масса	M	15000 кг	0.04
Координаты центра масс	r_x	1.7 м	0.04
	r_z	1.67 м	0.1
Элементы тензора инерции	I_{zz}	44000 кг·м ²	0.03
	I_{xx}	3000 кг·м ²	0.09
	I_{xz}	200 кг·м ²	0.92

Выводы

Представлен алгоритм получения динамических параметров твердого тела (всех кроме одной компоненты тензора инерции) по формам его колебаний на измерительном стенде. Для этого измерения производятся дважды, второй раз тело устанавливается на стенд, повернув его на 90°.

Алгоритм предполагает особый способ возбуждения колебаний: тело отклоняется от положения равновесия посредством силы, которую нужно знать. Это может вызвать технологические трудности для одинакового возбуждения всех трех мод колебаний, что можно отнести к недостаткам алгоритма.

Преимуществом является то, что после двух измерений определяются масса, положение центра масс и почти весь тензор инерции. И при этом не нужно знать жесткости пружин.

■ Автор выражает признательность А. П. Сейраняну за помощь в работе над статьей

Литература

1. Богданов В. В., Волобуев В. С., Кудряшов А. И., Травин В. В. Комплекс для измерения массы, координат центра масс и моментов инерции машиностроительных изделий // Измерительная техника, 2002. №2. С. 37.
2. Беляков А. О. Численное моделирование процесса измерения моментов инерции крупногабаритных тел методом свободных колебаний // Ученые записки ЦАГИ, 2002. В печати.

■ Статья поступила в редакцию 20 августа 2002 года.